

ЛЕКЦИЯ 9

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1 Гармонические колебания

1.1 Основные понятия

Колебательным движением называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания называются периодическими, если параметры, характеризующие состояние системы, повторяются через определенный промежуток времени:

$$S(t) = S(t + T), \quad (1)$$

где T - период колебаний, то есть наименьший промежуток времени, через который повторяется состояние системы, или время одного полного колебания; $S(t)$ - периодическая функция времени, характеризующая состояние системы - обобщённая координата.

Наиболее важной разновидностью периодических колебаний являются гармонические колебания. Это колебания, происходящие по закону синуса или косинуса:

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (2)$$

Гармонические колебания совершаются под действием упругой или квазиупругой силы. Упругими называют силы пропорциональные смещению и направленные к положению равновесия, то есть подчиняющиеся закону Гука:

$$F(x) = -kx, \quad (3)$$

где k - коэффициент упругости. Квазиупругими являются силы неупругие по своей природе, но действующие так же, как и упругие.

В зависимости от характера внешних воздействий колебания бывают свободные и вынужденные. Свободными являются колебания, возникающие в системе, которая в результате кратковременного внешнего воздействия выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе. Если колебания такой системы происходят только под действием внутренних сил, которые, как правило, являются упругими или квазиупругими, то такие свободные колебания называются собственными. В реальных условиях свободные колебания носят затухающий характер, так как они происходят при наличии различного вида сил сопротивления.

Системы, совершающие собственные колебания с одной степенью свободы, называются линейными гармоническими осцилляторами. Линейные осцилляторы совершают гармонические колебания лишь при малых

отклонениях от положения равновесия. Таким образом, гармонический осциллятор - идеальная модель реальной колеблющейся системы с одной степенью свободы. Примерами гармонического осциллятора являются разные маятники, колебательный контур.

1.2 Параметры гармонических колебаний

Пусть гармоническое колебание задано уравнением

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (4)$$

где A – **амплитуда** колебаний, представляет собой наибольшее отклонение системы от положения равновесия ($S(t) = A$ при $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$);

φ – **фаза** колебаний, физическая величина, однозначно характеризующая состояния гармонического осциллятора в данный момент времени;

φ_0 – **начальная фаза** колебаний (при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$);

ω – **циклическая частота** собственных гармонических колебаний;

$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}$, т.е. циклическая частота является скоростью изменения фазы колебаний;

$\nu_0 = \frac{n}{t}$ – **линейная частота** колебаний; она определяет число колебаний в единицу времени. Линейная частота связана с циклической частотой соотношением: $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

T – **период колебаний**, определяет время одного колебания

$$T = \frac{t}{n} = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad (5)$$

$\Delta\varphi$ – **разность фаз** или сдвиг по фазе. Если $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, то колебания происходят в одинаковой фазе, $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ – в противофазе.

1.3 Кинематика гармонических колебаний

Скорость гармонических колебаний некоторой величины $S = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ определяется, как первая производная от этой величины по времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \quad (6)$$

Таким образом, изменения скорости опережают по фазе изменения обобщённого параметра S на $\pi/2$.

Ускорение гармонических колебаний:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (7)$$

т.об. изменения ускорения происходят в противофазе с изменениями обобщённого параметра.

1.4 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Согласно выражению (7) ускорение гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

или:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\omega_0^2 S,$$

отсюда:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0. \quad (8)$$

Однородное дифференциальное уравнение (8) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Если какой-либо процесс описывается дифференциальным уравнением вида (70), он обязательно носит характер гармонических колебаний.

Решение уравнения (8) имеет вид:

$$S = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм (рис. 24). Вектор \vec{A} откладывается из произвольной точки оси X , под углом φ_0 , равным начальной фазе, и вращается с угловой скоростью ω_0 , при этом его проекция S совершает гармонические колебания. В момент времени t вектор A расположен по отношению к оси X под углом $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$.

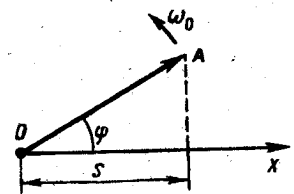


Рисунок 24

1.5 Динамика гармонических колебаний

1.5.1 Пружинный маятник

Пружинным маятником называется система, состоящая из груза массой m и невесомой пружины жесткостью k .

Если можно пренебречь силами сопротивления движению и трением, то при выведении системы из положения равновесия на груз будет действовать только сила упругости пружины.

Покажем, что при малых отклонениях от положения равновесия пружинный маятник совершает гармонические колебания.

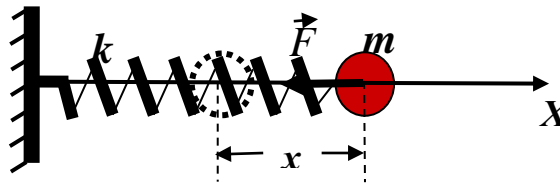


Рисунок 1

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x} \quad (9)$$

Запишем уравнение движения груза, составленное по 2-му закону Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = m\vec{a} \quad (10)$$

Спроектируем уравнение движения на ось X , при этом учтем, что сила упругости пропорциональна смещению из положения равновесия и направлена в сторону ему противоположную, а ускорение - это вторая производная координаты по времени. Тогда:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (11)$$

Преобразуем выражение (11) к виду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (12)$$

Введем обозначение $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (частота собственных незатухающих колебаний или собственная частота), окончательно получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (13)$$

Выражение (13) – дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Таким образом, действительно, при малых отклонениях от положения равновесия пружинный маятник совершает гармонические колебания.

Так как $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, то период колебаний пружинного маятника можно вычислить по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (14)$$

1.5.2 Математический маятник

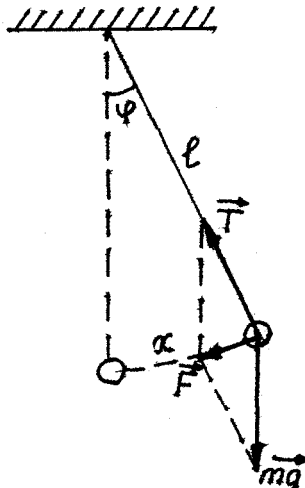


Рисунок 2

Математическим маятником называется тяжелая материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Из определения следует, что математическим маятником может служить любое тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити, на которой оно подвешено.

Пусть шарик массы m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной l (рис.2). Если шарик вывести из положения равновесия, отклонив его на угол φ , то шарик будет совершать колебательное движение. Покажем, что при малых отклонениях колебания будут иметь гармонический характер.

На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Результирующая сила $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ возвращает шарик к положению равновесия. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} \quad (15)$$

Из рисунка 2 следует:

$$F = -mg \sin \varphi \quad (16)$$

Знак (-) соответствует тому, что сила F направлена противоположно смещению шарика.

При малых углах φ $\sin \varphi \approx \frac{x}{l}$, где x – смещение от положения равновесия.

Учитывая, что ускорение $a = \ddot{x}$, из уравнений (15) и (16) получим:

$$m\ddot{x} = -m\vec{g} \frac{x}{l} \quad \text{и} \quad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (17)$$

Уравнение (17) соответствует дифференциальному уравнению гармонических колебаний (8), следовательно, при малых отклонениях от положения равновесия математический маятник совершает гармонические колебания. Решение уравнения (17) имеет вид:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18)$$

Из сравнения уравнений (17) и (8) следует:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (19)$$

Выражение (19) – собственная частота колебаний математического маятника. Период колебаний математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (20)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника зависит от его длины ℓ и не зависит ни от амплитуды колебаний, ни от массы маятника.

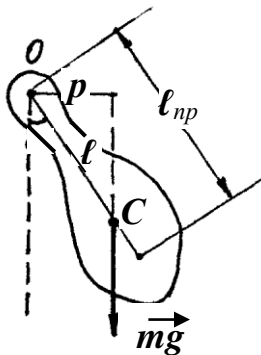


Рисунок 3

1.5.3 Физический маятник

Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно оси, не проходящей через центр тяжести тела (рисунок 3). При отклонении от положения равновесия на некоторый угол α , тело совершает колебательное движение с одной степенью свободы - α . На маятник действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры в точке подвеса O. Относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно

плоскости чертежа, сила реакции не создает вращательного момента, а сила тяжести создает переменный момент, модуль которого равен:

$$M(\alpha) = -m\vec{g}l \sin \alpha, \quad (21)$$

где ℓ - расстояние от точки подвеса O до центра тяжести тела C; $p = \ell \sin \alpha$ - плечо силы тяжести. Согласно основному закону динамики вращательного движения:

$$M(\alpha) = J\ddot{\alpha}, \quad (22)$$

где J - момент инерции тела относительно оси вращения, $\ddot{\alpha} = \varepsilon$ - угловое ускорение тела.

Из уравнений (21) и (22) следует:

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha . \quad (23)$$

При малых отклонениях от положения равновесия $\sin \alpha \approx \alpha$, поэтому:

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -mgl \alpha , \\ \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Из сравнения уравнений (24) и (8) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, дифференциальное уравнение которых

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 , \quad (25)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ - циклическая частота колебаний физического маятника.

Период колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (26)$$

Величина $\frac{J}{m\ell}$ имеет размерность длины и называется приведенной длиной физического маятника ℓ_{np} :

$$\ell_{np} = \frac{J}{m\ell} , \quad (27)$$

тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{np}}{g}} . \quad (28)$$

Из сравнения формулы (28) периода колебаний физического маятника с формулой периода колебаний математического маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ следует, что приведенной длиной физического маятника называют длину такого

математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.

1.5.4 Гармонические колебания в колебательном контуре

Колебательный контур - цепь состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R .

Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор сначала заряжают, сообщая ему заряд $\pm q$. Если $R=0$, то потерь энергии в контуре не будет, и колебания будут носить периодический незатухающий характер, т.е. заряд q

на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I , текущего через катушку индуктивности, будут меняться по гармоническому закону. Электрические колебания в контуре сопровождаются

превращениями энергий электрического и магнитного

полей. Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника (рисунок 28). Энергия электрического поля конденсатора $q^2/2C$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации $kx^2/2$, энергия магнитного поля катушки $LI^2/2$ - кинетической энергии $mV^2/2$, сила тока в контуре - скорости движения маятника. Индуктивность L играет роль массы m , а сопротивление контура - роль силы трения, действующей на маятник.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$IR = U_c + \mathcal{E}_s, \quad (29)$$

где IR - напряжение на резисторе. При $R=0$ $IR = 0$. $U_c = \frac{q}{C}$ - напряжение на

конденсаторе; $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ - э.д.с. самоиндукции, поэтому второй закон

Кирхгофа примет вид:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0;$$

или:

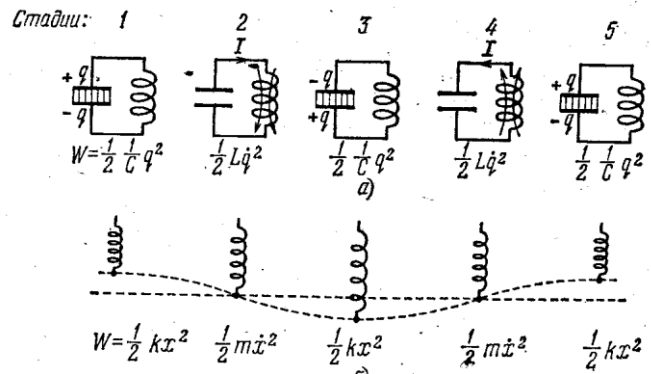


Рисунок 4

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (30)$$

Из сравнения уравнений (30) и (8) следует, что при отсутствии сопротивления в колебательном контуре возникают гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (31)$$

и периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (32)$$

Формула (32) называется формулой Томсона.

Решение уравнения (30):

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2),$$

где $I_m = \omega_0 q_m$. Колебания тока I опережают по фазе колебания заряда q на $\pi/2$.

Напряжение на конденсаторе:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \text{где } U_m = \frac{q_m}{C}.$$

1.6 Электромеханическая аналогия

Из сравнений упругих колебаний пружинного маятника и электромагнитных колебаний в контуре следует, что между этими явлениями имеется аналогия. Оба колебания имеют одну степень свободы: роль смещения маятника от положения равновесия x в колебательном контуре играет заряд на обкладках конденсатора q . Роль скорости маятника играет в контуре сила тока, роль квазиупругого элемента играет величина, обратная электроёмкости, роль инерционного элемента - индуктивность. Таким образом имеет место следующая аналогия:

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow q \\ v &\leftrightarrow I \end{aligned}$$

$$k \leftrightarrow (1/C)$$

$$m \leftrightarrow L$$

Далее, пользуясь этой аналогией, можно показать, что кинетическая энергия маятника $mv^2/2$ аналогична энергии магнитного поля катушки $LI^2/2$, Потенциальная энергия упругой деформации $kx^2/2$ аналогична энергии электрического поля конденсатора $q^2/2C$:

$$W_{кин} \leftrightarrow W_{магн}$$

$$W_{пот} \leftrightarrow W_{эл}$$

Электромеханическая аналогия позволяет моделировать колебания в сложных механических системах электрическими средствами, значительно более удобными для анализа и измерений и обладающими большей наглядностью.

1.7 Энергия гармонических колебаний

В качестве примера рассмотрим механические колебания. Пусть точка совершает гармонические колебания вдоль оси X , около положения равновесия, принятого за начало координат, по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$W_K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (33)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F :

$$W_P = - = kx^2/2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (34)$$

Полная энергия

$$W = W_K + W_P = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний являются периодическими функциями времени, а полная энергия гармонического осциллятора не зависит от времени и $W = (W_K)_{max} = (W_P)_{max}$.

Пользуясь аналогией, можно получить выражения для энергий магнитного и электрического полей колебательного контура и его полную энергию:

$$W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (35)$$

$$W_{\text{эл}} = -q^2/2C = \frac{LI_0^2 \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (36)$$

$$W = W_{\text{маг}} + W_{\text{эл}} = \frac{LI_0^2 \omega_0^2}{2}$$

$$W = (W_{\text{маг}})_{\text{max}} = (W_{\text{эл}})_{\text{max}} \neq f(t).$$

1.8 Сложение гармонических колебаний

1.8.1 Колебания одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющиеся тела могут одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах. Для нахождения результирующего колебания эти колебания надо сложить.

Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты:

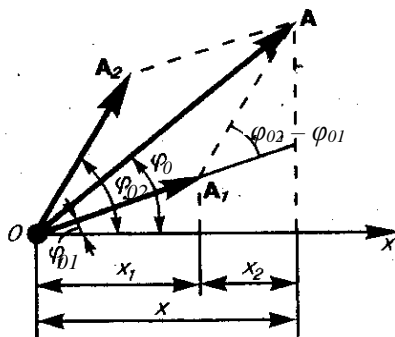


Рисунок 5

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}); \quad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}), \quad (37)$$

воспользовавшись *методом* вращающегося вектора амплитуды. Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис 5). Так как векторы A_1 , A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз между ними ($\varphi_{02} - \varphi_{01}$) остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (38)$$

В выражении (38) амплитуда A и начальная фаза φ_0 соответственно задаются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad (39)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \quad (40)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний. Проанализируем выражение (39) в зависимости от разности фаз ($\varphi_{02} - \varphi_{01}$):

$$1) (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \text{ тогда } A = A_1 + A_2,$$

т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pm (2m+1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$, тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты ω и $\omega + \Delta\omega$. причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases} \quad (41)$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором сомножителе $\Delta\omega / 2 \ll \omega$, найдем

$$x = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t \quad (42)$$

Результирующее колебание (104) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитудой A , которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_{\delta} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (43)$$

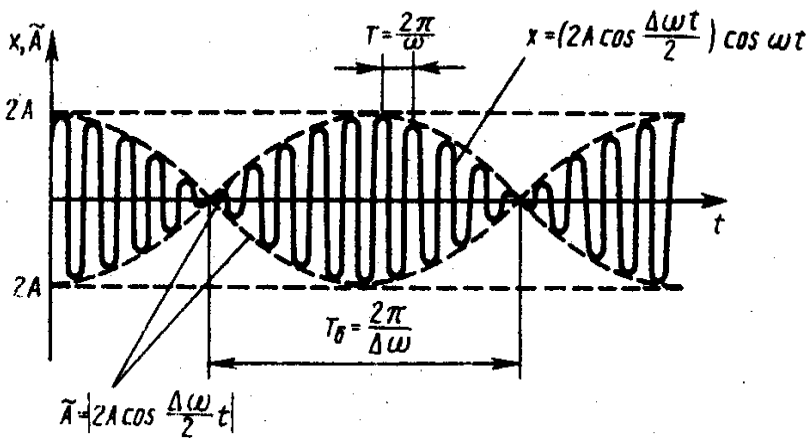


Рисунок 6

Частота изменения амплитуды A_{δ} в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_{\delta} = \Delta\omega$.

Характер зависимости (42) показан на рис. 6, где сплошные жирные линии дают результирующего колебания (42), а

оггибающие их - график медленно меняющейся по уравнению (43) амплитуды.

меняющейся по уравнению (43)

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями - наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания $S = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте ω_0 :

$$S = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{02}) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{0n}) \quad (44)$$

Представление периодической функции в виде (44) связывают с понятием гармонического анализа сложного периодического колебания, или разложения Фурье. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, называются первой (или основной), второй, третьей и т. д. гармониками сложного периодического колебания.

1.8.2 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = B \cos(\omega t + \alpha) \quad (45)$$

где α - разность фаз обоих колебаний, A и B — амплитуды складываемых колебаний. Для получения уравнения траектории результирующего колебания исключим из выражений (45) параметр t . Запишем складываемые колебания в виде

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi;$$

т.к. $\cos \omega t = \frac{x}{A}$, то $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$;

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2};$$

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi = - \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2};$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi;$$

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi;$$

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (46)$$

это уравнение эллипса оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно. Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются эллиптически поляризованными.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз φ . Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1) $\varphi = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm \frac{B}{A} x; \quad (47)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m (рис. 7а), а знак минус — нечетным значениям m (рис. 7б). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с

частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, совершающимся вдоль прямой (47), составляющей с осью x угол

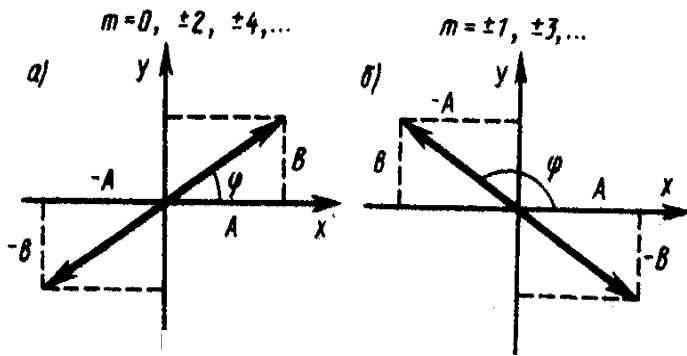


Рисунок 7

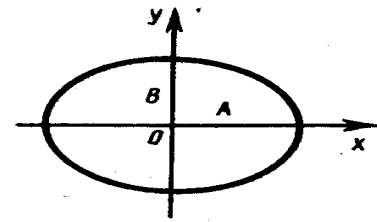


Рисунок 8

$$\varphi = \arctg \left(\frac{B}{A} \cos m\pi \right).$$

Полученные колебания называются *линейно поляризованными*.

2) $\varphi = (2m+1)\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$)

В данном случае уравнение (45) примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{48}$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амplitудам (рисунок 8). Кроме того, если $A=B$, то эллипс (48) вырождается в *окружность*. Такие колебания называются *циркулярно поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу*.

3) Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**.

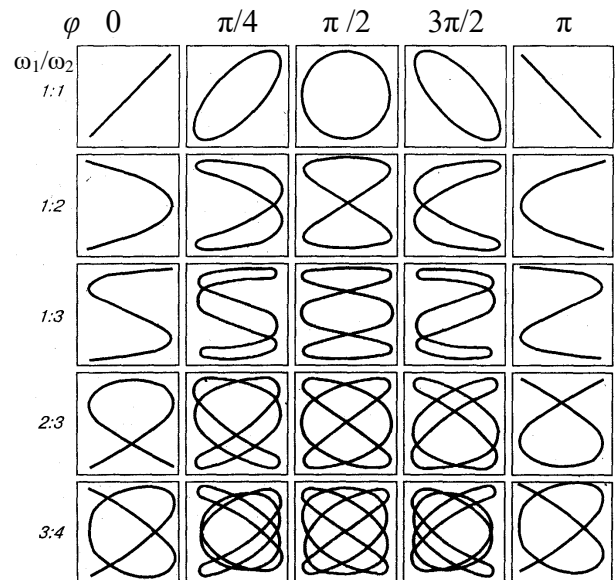


Рисунок 9

Вид этих кривых зависит от соотношения амplitуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рисунке 9 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной частоте или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу - широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз.

2 ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1 Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Если кроме возвращающей силы на систему действует ещё и сила сопротивления (например, сила трения в механической системе или сопротивление проводника в контуре), то энергия колебательной системы будет расходоваться на преодоление этого сопротивления. Вследствие этого амплитуда колебаний будет уменьшаться и колебания будут затухать. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Рассмотрим затухание на примере пружинного маятника с коэффициентом упругости k , массой m , колеблющегося в среде, например, в жидкости, с коэффициентом сопротивления r . Предположим, что колебания малы и что маятник испытывает вязкое трение. В этом случае можно считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$F_{mp} = -r v = -r \frac{dx}{dt}, \quad (49)$$

Знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости. Закон движения маятника при данных условиях будет иметь вид:

$$m \ddot{x} = -k x - r \dot{x}. \quad (50)$$

Преобразуем это выражение:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (51)$$

Обозначим: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\frac{r}{2m} = \delta$, где ω_0 - циклическая частота собственных колебаний пружинного маятника при отсутствии сил сопротивления, δ - коэффициент затухания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника примет вид:

$$\ddot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 x = 0 \quad (52)$$

Получили однородное дифференциальное уравнение, второго порядка, описывающее малые затухающие колебания в системе с вязким трением. Его решение имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (55)$$

где ω - частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2 / (4m)^2}. \quad (54)$$

Уравнение (52) справедливо для любой системы, как механической, так и немеханической, например, для электромагнитного контура. Действительно, для колебательного контура с сопротивлением R второе правило Кирхгофа имеет вид уравнения (29), которое после преобразований принимает вид:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Из сравнения с уравнением (52) следует:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение затухающих колебаний любой линейной системы в общем виде задается уравнением:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\delta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0. \quad (55)$$

где S - колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $\delta = const$ – коэффициент затухания, ω_0 - собственная циклическая частота колебательной системы, т.е. частота свободных *незатухающих* колебаний той же колебательной системы (при отсутствии потерь энергии) Решение уравнения (55) имеет вид:

$$S = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (56)$$

где

$$A = A_0 e^{-\delta t} \quad (57)$$

амплитуда затухающих колебаний; A_0 - начальная амплитуда.

Таким образом, затухающие колебания описываются функцией с экспоненциально убывающей амплитудой, т.е. затухающие колебания не являются гармоническими.

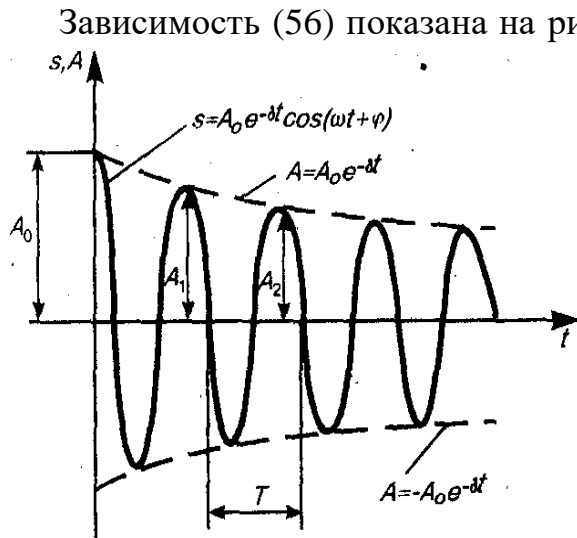


Рисунок 10

Зависимость (56) показана на рисунке 10 сплошной линией, а зависимость (57) — штриховыми линиями. Если пропорциональность силы трения и скорости не выполняются, то и закон убывания амплитуды будет другим. Например при сухом трении $F_{тр} \neq f(t)$, $F_{тр} = const$ и амплитуда убывает согласно геометрической прогрессии. Во многих измерительных приборах наряду с вязким трением (наличие смазки) присутствует и сухое трение (напр. в подшипниках). Пока амплитуды колебаний велики, в затухании доминирует вязкое трение. При малых амплитудах преобладает

влияние сухого трения.

2.2 Параметры затухающих колебаний

1) *Период затухающих колебаний:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (58)$$

При $\delta \ll \omega_0$ колебания не отличаются от гармонических: $T = 2\pi / \omega_0$.

2) *Амплитуда затухающих колебаний* выражается формулой (119).

3) *Декремент затухания*, равный отношению двух последовательных амплитуд колебаний $A(t)$ и $A(t+T)$, характеризует быстроту уменьшения амплитуды за период:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T} \quad (59)$$

4) *Логарифмический декремент затухания* - натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\delta T} = \delta T \quad (60)$$

Логарифмический декремент затухания - постоянная для данной колебательной системы величина.

5) *Временем релаксации* называется промежуток времени (τ) в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\delta\tau} = e, \quad \delta\tau = 1, \\ \tau = 1/\delta, \quad (61)$$

Из сравнения выражений (60) и (61) получим:

$$\theta = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (62)$$

где N_e — число колебаний, совершаемых за время релаксации.

Если за время t система совершает N колебаний, то $t = N \cdot T$ и уравнение затухающих колебаний можно представить в виде:

$$S = A_0 e^{-\delta NT} \cos(\omega t + \varphi) = A_0 e^{-\theta N} \cos(\omega t + \varphi).$$

6) *Добротностью колебательной системы* (Q) называется величина, характеризующая потерю энергии в системе за период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (63)$$

где W - полная энергия системы, ΔW - энергия, рассеянная за период. Чем меньше энергии рассеивается, тем больше добротность системы. Расчеты показывают, что

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (64)$$

Таким образом, добротность обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания. Из формулы (64) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

7) *Потенциальную энергию* системы в момент t , можно выразить через потенциальную энергию W_0 при наибольшем отклонении:

$$W = \frac{k A^2}{2} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\theta N} = W_0 e^{-2\theta N}. \quad (65)$$

Обычно условно считают, что колебания практически прекратились, если их энергия уменьшилась в 100 раз (амплитуда уменьшилась в 10 раз). Отсюда

можно получить выражение для расчета числа колебаний, совершенных системой:

$$\frac{W_o}{W} = e^{2\theta N} = 100, \quad \ln 100 = 2\theta N;$$

$$N = \frac{\ln 100}{2\theta} = \frac{2,3}{\theta}. \quad (66)$$

2.3 Режимы затухающих колебаний

1) При $\omega_o^2 > \beta^2$, согласно формуле (58) $T \rightarrow 2\pi/\omega_o$. Такой режим затухания

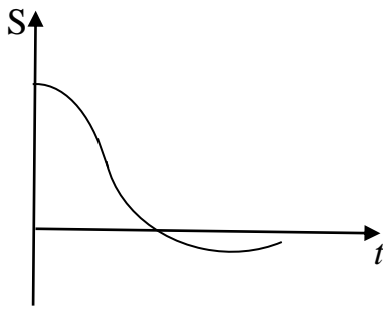


Рисунок 11

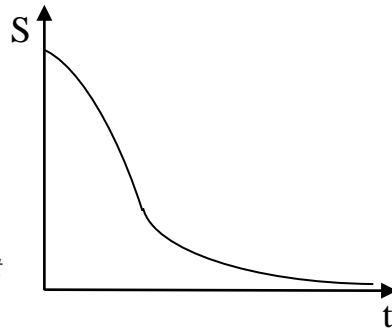


Рисунок 12

называют периодическим или колебательным (рисунок 10). В этом случае для характеристики процессов в системе можно использовать параметры гармонических колебаний.

2) При $\omega_o^2 \approx \beta^2$ наступает критический режим колебаний. В

формуле (58) $\omega \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. Наличие большого затухания в системе приводит к большим потерям энергии, поэтому, перейдя положение равновесия, система не в состоянии отойти от него на сколь-нибудь заметное расстояние и возвращается к равновесию (рисунок 11). Условие наблюдения критического режима можно получить из соотношений:

а) для механической системы

$$\frac{r_k}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad r_k = 2\sqrt{km}. \quad (67)$$

в) по аналогии для электрической системы

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (68)$$

3) При $\omega_o^2 < \delta^2$ колебания системы носят апериодический характер. Система не переходит положения равновесия, а медленно приближается к нему (рисунок 12).

3 Вынужденные колебания

3.1 Условия возникновения вынужденных колебаний

Колебания, происходящие в какой-либо колебательной системе под действием изменяющейся внешней силы, называются *вынужденными*. Внешнюю изменяющуюся силу, вызывающую эти колебания, обычно называют *вынуждающей*.

Вынужденные колебания можно возбудить периодически кратковременно действующей постоянной силой (толчками); время действия толчка должно быть намного меньше периода собственных колебаний системы. Так, если ударять по маятнику в те моменты, когда он проходит положения равновесия, причем направление силы в момент удара совпадает с направлением мгновенной скорости, то после нескольких ударов маятник сильно раскачается. Если же частота ударов не будет соответствовать частоте системы, то одни удары будут ускорять, другие – замедлять движение и сильно раскачать маятник не удастся.

Вынужденные колебания возникают, например, в различных машинах из-за несбалансированности быстро вращающихся маховиков. В автомобилях вынужденные колебания его двигателя, укрепленного на упругой подвеске, возникают при возвратно-поступательном движении поршней. Вынужденные колебания мостов возникают под действием шагов идущей в ногу колонны людей и т.д.

3.2 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Предположим, что на колебательную систему все время действует вынуждающая сила, изменяющаяся со временем по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (69)$$

где F_0 - амплитуда силы. Очевидно, вынуждающая сила изменяется со временем с периодом $T = 2\pi/\omega$. Она совершает работу, знак которой зависит от разности фаз между силой и скоростью движения тела. Когда направления движения тела и вынуждающей силы совпадают, то она совершает положительную работу, ускоряя движение колеблющегося тела. Если же направления движения тела и вынуждающей силы противоположны, то она совершает отрицательную работу, тормозя движение колеблющегося тела. С течением времени это приводит к тому, что тело вынуждено совершать колебания с той же частотой, с какой изменяется вынуждающая сила.

В случае малых механических колебаний, когда сила сопротивления пропорциональна скорости в соответствии со вторым законом динамики, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t, \quad (70)$$

где $(-kx)$ - возвращающая сила; $(-r\dot{x})$ - сила сопротивления; $F_0 \cos \omega t$ - вынуждающая сила.

Учитывая, что $\omega_0^2 = k/m$, $\delta = r/(2m)$ и обозначив $f_0 = F/m$, уравнение (70) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (71)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка описывает *вынужденные колебания* в механической системе, например, колебания маятника. Решение его, как доказывается в курсе высшей математики, состоит из суммы $x_1(t)$ - общего решения уравнения (52) и $x_2(t)$ - частного решения уравнения (71).

Решение уравнения (52) $x_1(t)$, как установлено ранее, записывается в виде

$$x_1(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (72)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, характеризует свободные, затухающие по экспоненциальному закону колебания, начальная амплитуда и фаза которых зависят от начальных условий. Эти колебания через некоторое время, называемое *временем установления вынужденных колебаний*, практически исчезают. В установившемся режиме решение уравнения (71) ищем в виде:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (73)$$

где A - амплитуда вынужденных колебаний и φ - сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой (в данном случае начальную фазу удобнее обозначать через $-\varphi$). Их можно определить из условия, согласно которому подстановка выражения (73) в уравнение (71) должна приводить к тождеству. Тогда получим:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad (74)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (75)$$

Подставив в (73) значения A и φ , определяемые формулами (74) и (75), получим частное решение (установившийся режим) неоднородного уравнения (71):

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (76)$$

Функция (76) в сумме с функцией (72) дает общее решение уравнения (71), описывающего поведение системы при вынужденных колебаниях. Таким образом, функция (76) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и обратно пропорциональна массе системы. Кроме того, амплитуда установившихся вынужденных колебаний обратно пропорциональна коэффициенту затухания δ и уменьшается с его увеличением.

Уравнение (71) и его решение (76) справедливо для вынужденных колебаний любой физической природы. Таким образом, общее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний осциллятора, характеризуемого обобщённым параметром S , имеет вид:

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = f_0 \cos\omega t \quad (77)$$

Если изменения какого-либо параметра системы описываются дифференциальным уравнением (77), то в этот процесс представляет собой вынужденные колебания. Решение этого уравнения в установившемся режиме имеют вид аналогичный уравнениям (73) - (75).

3.3 Резонанс

Из выражения (74) следует, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. При частоте вынуждающей силы, приближающейся к частоте собственных колебаний системы, амплитуда колебаний увеличивается. Частоту изменения вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, называют *резонансной*. Расчёты показывают, что

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (78)$$

Подставив это значение частоты в выражение (74), получим формулу амплитуды при резонансе:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (79)$$

Из выражения (79) следует, что при отсутствии сопротивления среды резонансная амплитуда обращалась бы в бесконечность. Согласно формуле (78) при $r \rightarrow 0$, а следовательно и $\delta \rightarrow 0$, $\omega_{\text{рез}} \rightarrow \omega_0$.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы показана на рисунке 13. Отдельные кривые на графике

соответствуют различным значениям параметра δ . В соответствии с выражениями (78) и (79), чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании (таком, что $2\delta^2 > \omega_0^2$) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается - с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает. Изображенная на рисунке 13 совокупность графиков функции (79), соответствующих различным значениям параметра δ ,

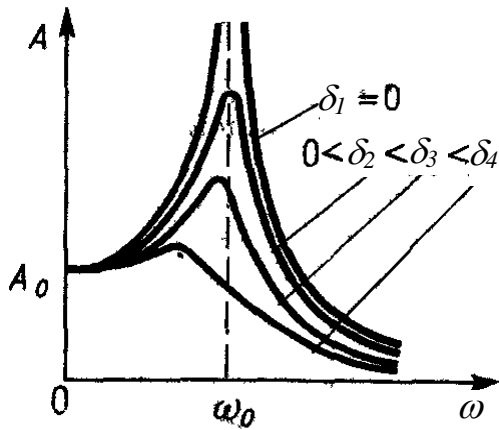


Рисунок 13

называется резонансными кривыми.

По поводу резонансных кривых можно сделать еще следующие замечания. При стремлении ω_0 к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному f_0/ω_0^2 , т. е. F_0/k . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины F_0 . При $\omega \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше δ , тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем «острее» получается максимум. Из формулы (79) вытекает, что при малом затухании (т. е. при $\delta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\delta\omega_0} \quad (80)$$

Разделим это выражение на смещение x_0 из положения равновесия под действием постоянной силы F_0 , учитывая, что $x_0 = f_0/\omega_0^2$.

В результате получим:

$$\frac{A_{рез}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta} = Q \quad (81)$$

Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

Как видно из рис.14, вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ лежит в пределах от 0 до π .

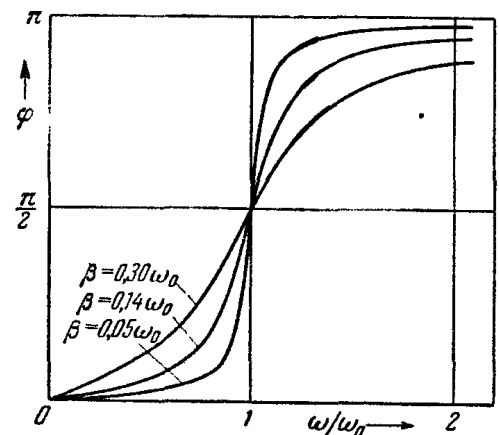


Рисунок 14

При изменении частоты вынуждающей силы меняется и сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой.

Т.к. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, то при $\omega \ll \omega_0$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2}$, т.е. $\varphi \rightarrow 0$. Следовательно,

фаза смещений почти совпадает с фазой вынуждающей силы. С увеличением ω , при $\omega \rightarrow \omega_0$ и $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \pi/2$. Частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$. Т.е. при резонансе вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на $\pi/2$. Резонансная частота меньше собственной. Следовательно, в момент резонанса $\varphi < \pi/2$. При дальнейшем увеличении частоты ω , когда $\omega \gg \omega_0$, $\operatorname{tg} \varphi = -2\delta/\omega$ и сдвиг фаз становится равным π . Зависимость φ от ω при разных значениях δ показана графически на рисунке 14.

При слабом затухании $\omega_{рез} \approx \omega_0$, и значение φ при резонансе можно считать равным $\pi/2$. Сдвиг фаз на $\pi/2$ при резонансе означает, что вынуждающая сила опережает смещение на $T/4$. При этом условии работа вынуждающей силы всегда положительна и приток энергии к колебательной системе максимален.

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств ни в коем случае не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий. В противном случае возникают вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Известны случаи, когда обрушивались мосты при прохождении по ним марширующих колонн солдат. Это происходило потому, что собственная частота колебаний моста оказывалась близкой к частоте, с которой шагала колонна.

Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т.д.

4 Автоколебания

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые автоколебания - незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания *принципиально* отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых

инструментах и органичных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струёй.

Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т. д.

5 Переменный ток

5.1 Вынужденные электромагнитные колебания. Закон Ома для переменного тока.

Переменный ток можно рассматривать как установившиеся вынужденные электромагнитные колебания в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор. Мы будем рассматривать **квазистационарные токи**, для которых мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа.

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, содержащей последовательно включённые резистор, катушку индуктивности, конденсатор и источник переменной Э.Д.С., изменяющейся по гармоническому закону:

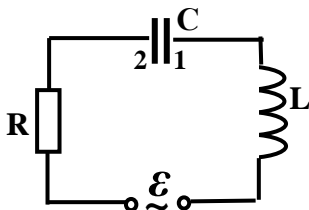


Рисунок 15

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t, \quad (82)$$

где ε_0 - амплитуда электродвижущей силы.

В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения U_R , U_L , U_C . Будем считать, что внутреннее сопротивление источника э.д.с. пренебрежимо мало по сравнению с R . По закону Ома для участка цепи 1- L- R-2 имеем:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) - L(dI/dt) + \varepsilon_0 \cos \omega t, \quad (83)$$

где $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C$ - мгновенное значение разности потенциалов обкладок конденсатора, q - его заряд в этот же момент времени, $-L(dI/dt)$ - э.д.с. самоиндукции в контуре. Возьмём производную по времени от обеих частей равенства (145). Учитывая, что $dq/dt = I$ - ток в контуре, получим:

$$iR = -\frac{1}{C}I - L\dot{I} - \varepsilon_0 \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{L} \sin \omega t \quad (84)$$

Учитывая, что $R/L = 2\delta$, $1/(\omega C) = \omega_0^2$ и введя обозначение $-\varepsilon_0 \omega/L = e_0$ уравнение (84) запишем в виде:

$$\ddot{I} + 2\beta\dot{I} + \omega_0^2 I = e_0 \sin \omega t \quad (85)$$

Решение уравнения (85) аналогично решению ранее рассмотренного уравнения (71). Ищем решение уравнения (84) для установившегося режима в виде:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

где I_0 - амплитуда переменного тока в контуре, φ - сдвиг фаз между э.д.с. источника тока и силой тока. По аналогии с определением формул (74) и (75) найдём выражения для I_0 и φ :

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \quad (86)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (87)$$

Соотношение (86) называется законом Ома для переменного тока. Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (88)$$

называется **полным сопротивлением** цепи.

$R_L = \omega L$ - **индуктивное сопротивление**;

$R_C = 1/(\omega C)$ - **ёмкостное сопротивление**;

$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - **реактивное сопротивление**. Реактивное

сопротивление не вызывает тепловых потерь в цепи переменного тока. Оно создаёт сдвиг фаз между током и вынуждающей э.д.с.

R - **активное сопротивление**; за счёт него возникают тепловые потери в контуре.

Падение напряжения на отдельных участках цепи, представленной на рис. 15, можно получить, используя выражение (85):

$$U_C = q/C = \frac{1}{C} \cdot \int I dt = U_{0C} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2);$$

$$U_L = L (dI/dt) = U_{0L} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2);$$

$$U_R = U_{0R} \cos(\omega t - \varphi).$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$U_C + U_L + U_R = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

На рисунке 16 представлена векторная диаграмма амплитуд колебаний на всех элементах рассматриваемой цепи (см. рис. 15).

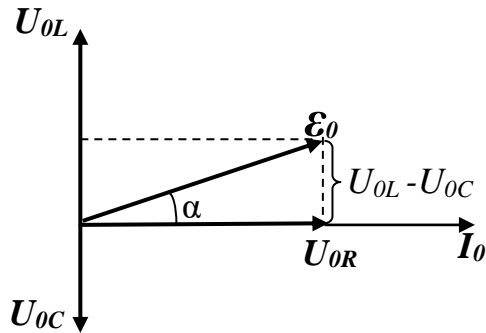


Рисунок 16

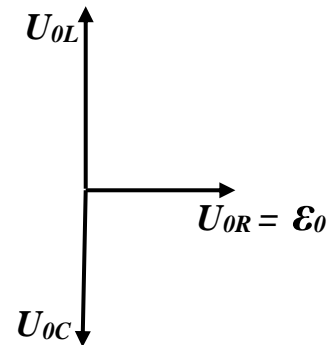


Рисунок 17

Из выражения (86) следует, что амплитуда тока зависит от частоты вынуждающей э.д.с. (рисунок 18). Максимального значения I_0 достигает при частоте $\omega_{рез}$, равной:

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (89)$$

$$(I_0)_{max} = I_{0рез} = \varepsilon_0 / R \quad (90)$$

$$\varphi_{рез} = 0$$

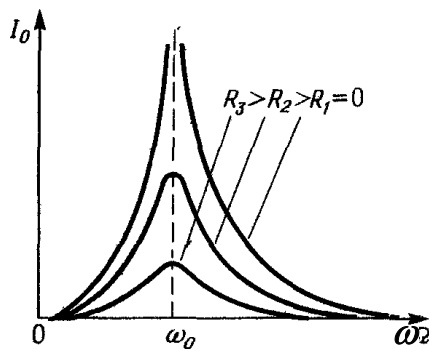


Рисунок 18

Явление достижения током максимального значения $I_{0рез}$ при $\omega = \omega_{рез}$ называется **резонансом напряжений**. Это

вызвано тем, что при $\omega = \omega_{рез}$ падения напряжений на индуктивном и ёмкостном сопротивлениях достигают максимальных значений равных по модулю и противоположных по фазе, поэтому суммарное падение напряжение на реактивном сопротивлении равно нулю. Падение напряжения на активном сопротивлении максимально, его амплитудное значение

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} \quad (91)$$

$$U_{R0} = \varepsilon_0.$$

Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис.17.

Подставив в формулу (91) значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим:

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 = Q U_0, \quad (92)$$

где Q - добротность контура.

Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе, можно получить напряжение с амплитудой QU_m (в данном случае Q - добротность контура, которая может быть значительно больше U_m . Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

5.2 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Полное мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений э.д.с. и силы тока. $P(t) = \mathcal{E}(t) I(t)$, где

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi). \text{ Раскрыв } \cos(\omega t - \varphi),$$

получим

$$P(t) = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_0 \mathcal{E}_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi \quad (93)$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 16) следует, что $\mathcal{E}_0 \cos \varphi = RI_0$. Поэтому

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_0^2.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Величины

$I_{\text{эф}} = I_0 / \sqrt{2}$, $U_{\text{эф}} = U_0 / \sqrt{2}$ называются соответственно действующими (или

эффективными) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения. Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= I_{\text{эф}} \mathcal{E}_{\text{эф}} \cos \varphi \\ \langle P \rangle &= I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \end{aligned} \quad (94)$$

где множитель $\cos \varphi$ называется **коэффициентом мощности**,

$$\mathcal{E}_{\text{эф}} \cos \varphi = I_{\text{эф}} R = U_{\text{эф}}$$

(см. рисунок 16).

Формула (94) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos \varphi = 1$ и $P = I_{\text{эф}} \mathcal{E}_{\text{эф}}$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R=0$), то $\cos \varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если $\cos \varphi$ имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока I , что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить $\cos \varphi$, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

6 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

6.1 Основные понятия.

Колебания, возбуждаемые в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше это расстояние. При изучении распространения колебаний среда рассматривается как сплошная, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Периодический во времени и в пространстве процесс распространения колебаний, происходящий с определённой для данной среды скоростью, называется волновым процессом или волной. Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Продольной называется волна, при которой колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Волна - **поперечная**, если колебания частиц среды происходят в плоскостях перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации растяжения или сжатия, т.е. в твердых, жидких или газообразных телах. Поперечные волны могут распространяться в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т.е. фактически только в твердых телах.

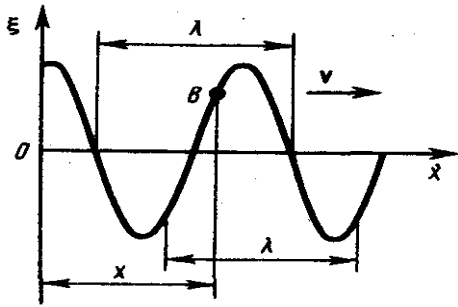


Рисунок 19

В жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах - как продольные, так и поперечные.

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис.19 представлена гармоническая поперечная

волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси X , т.е. приведена зависимость между смещением ξ частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием X этих частиц (например частицы B) от источника колебаний O для какого-то фиксированного момента времени t .

Волна может распространяться в виде одиночного импульса (одиночной волны), если возмущение в среде однократное, а также в форме волнового поля, заполняющего всё пространство, если источник действует непрерывно. Ограниченный ряд повторяющихся возмущений называется **цугом** волн. Обычно понятие цуга относится к волне в виде отрезка синусоиды (косинусоиды).

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. В зависимости от формы волновых поверхностей волна может быть плоской, сферической, цилиндрической и т. д.

Фронтом волны называется граничная волновая поверхность, до которой волна дошла в данный момент времени.

Линии, перпендикулярные фронту волны, указывающие направление её распространения, называются **лучами**.

Наименьшее расстояние между двумя ближайшими волновыми поверхностями, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны**.

Время, за которое совершается один полный цикл колебаний (волна распространяется на расстояние, равное длине волны), называется **периодом**. Длина волны λ связана с периодом T соотношением:

$$\lambda = v T. \quad (95)$$

Частотой волны ν (линейной частотой) называют число колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$v = 1 / T \quad (96)$$

Линейная частота и период связаны с **циклической частотой ω** соотношением:

$$\omega = 2 \pi \nu = 2\pi / T \quad (97)$$

Линейная и циклическая частоты характеризуют периодичность волнового процесса во времени. Пространственную периодичность волнового процесса характеризует волновое число \vec{k} . **Волновое число** это вектор, численно равный количеству длин волн, укладываемых на расстоянии 2π метра. Направление волнового вектора совпадает с направлением скорости волны:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

Модуль волнового вектора равен:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \quad (98)$$

Из уравнений (95) - (98) следует, что:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{v}{\omega} \quad (99)$$

В формулах (95), (98), (99) v - **фазовая скорость**, это скорость распространения фазы колебаний. Исходя из принципа суперпозиции, согласно которому волны от различных источников, накладываясь друг на друга, не изменяют друг друга, любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т.е. в виде волнового пакета или группы волн. **Волновым пакетом** называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства. Если фазовая скорость волн в среде зависит от их частоты, то это явление называют **дисперсией волн**, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется **диспергирующей средой**. Если среда не обладает дисперсией, то при распространении волнового пакета его форма сохраняется и быстроту распространения волн можно характеризовать фазовой скоростью. Но, если среда обладает дисперсией, то волновой пакет при распространении меняет свою форму, "расплывается", и характеризовать быстроту волнового процесса фазовой скоростью невозможно. В таком случае применяется **групповая скорость** - это скорость перемещения максимума группы волн («пакета»). Она соответствует скорости переноса энергии волны. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v соотношением:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (100)$$

При отсутствии дисперсии $dv/d\lambda = 0$ и $u=v$.

6.2 Уравнение бегущей волны.

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Независимо от физической природы все волны подчиняются одинаковым закономерностям и описываются одинаковыми математическими уравнениями.

Для описания колебания точек среды в любой момент времени при распространении волны вводится *волновая функция* $\xi(r, t)$, являющаяся функцией координат и времени. Выражение, определяющее эту функцию, и есть уравнение волны. Для вывода уравнения бегущей волны рассмотрим простейший случай: *плоская волна*, распространяется вдоль оси x . Источник колебаний находится в точке $x = 0$ (рис.19) и колеблется по гармоническому закону:

$$\xi(0, t) = A(0) \cos \omega t. \quad (101)$$

Частица В среды колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на время τ , необходимое для прохождения волной расстояния x : $\tau = x/v$, где v - скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega (t - x/v). \quad (102)$$

Уравнение (102) и есть уравнение бегущей плоской гармонической волны. Если в среде не происходит потери энергии волны за счёт её поглощения, то амплитуда плоской волны A остаётся постоянной: $A(0) = A(x)$. В уравнении (102) начальная фаза колебаний источника волн принята за 0. Если плоская гармоническая волна распространяется против оси x , то её уравнение имеет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos \omega (t + x/v) \quad (103)$$

Уравнение (102) можно преобразовать, используя выражение (98):

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t - 2\pi x/\lambda) \quad (104)$$

Уравнение сферической волны — волны, волновые поверхности которой имеют вид концентрических сфер, имеет вид:

$$\xi(x, t) = \frac{A_0}{x} \cos(\omega t - kx), \quad (105)$$

Из уравнения сферической волны следует, что её амплитуда даже при отсутствии поглощения средой убывает с расстоянием по закону $1/x$. Уравнение (105) справедливо лишь для x , значительно превышающих размеры источника (тогда источник колебаний можно считать *точечным*).

Рассмотренные уравнения описывают как продольные, так и поперечные волны.

6.3 Дифференциальное уравнение волны (волновое уравнение)

Дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны, называется волновым уравнением. Для его получения необходимо взять частные производные второго порядка по координатам и времени от функции (104). Для гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x , получим волновое уравнение в виде:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2},$$

где $v = \omega/k$.

Если волна распространяется вдоль некоторого направления $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то волновое уравнение примет вид:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \Delta \xi, \quad (106)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Волновое уравнение (106) справедливо для любых волн, распространяющихся в однородной изотропной непоглощающей среде.

7 Энергия волны

Пусть плоская незатухающая гармоническая волна распространяется вдоль оси x . Её уравнение имеет вид (104):

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

Распространение волны сопровождается переносом энергии без переноса вещества. Полная энергия частиц среды, в которой распространяется волна, равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$W_k + W_n = W \quad (107)$$

Рассмотрим объём среды ΔV , возбуждаемый волной. Если плотность среды ρ , то масса рассматриваемого объёма $\Delta m = \rho \Delta V$. Определим кинетическую энергию частиц рассматриваемого объёма:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \Delta V. \quad (108)$$

Потенциальная энергия равна работе по упругой деформации среды. Можно показать, что она равна кинетической энергии и также определяется формулой (108). Тогда полная энергия, переносимая волной через объём ΔV , равна $2 W_k$:

$$W = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \Delta V. \quad (109)$$

Таким образом, в каждом элементе объёма, охваченного волновым движением W_k и W_n являются одинаковыми функциями времени, соответственно и W изменяется с течением времени по такому же закону (сравнить: полная энергия гармонических колебаний не зависит от времени). Эта закономерность справедлива для любых бегущих волн в упругой среде независимо ни от формы их волновых поверхностей, ни от типа деформации среды.

Под **объёмной плотностью энергии** w упругих волн понимают механическую энергию единицы объёма среды, обусловленную распространением этих волн:

$$w = W / \Delta V = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad (110)$$

Потоком энергии Φ_w через какую-либо площадь S называется величина, численно равная энергии, переносимой волной через эту площадь в единицу времени:

$$\Phi_w = W / \Delta t = w u S, \quad (111)$$

где u - групповая скорость.

Плотностью потока энергии или **вектором Умова** называется векторная величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, её модуль равен:

$$j = W / \Delta S \cdot \Delta t = w u = \rho \omega^2 A^2 u \sin^2(\omega t - kx) \\ \vec{j} = w \cdot \vec{u} \quad (112)$$

Среднее по времени значение модуля плотности потока энергии называется **интенсивностью** волны J :

$$J = \langle j \rangle = \langle w \rangle / u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u. \quad (113)$$

Таким образом, *интенсивность волны пропорциональна квадрату её амплитуды.*

Единицы энергетических характеристик волны:

$$[w] = [\text{Дж}/\text{м}^3]; \quad [\Phi_w] = [\text{Дж}/\text{с}]; \quad [j] = [J] = [\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})]$$

8 Интерференция волн

Рассмотрим случай наложения синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде различными источниками. Ограничимся случаем одновременного распространения двух синусоидальных волн, соответствующих одинаково направленным колебаниям частиц среды.

Пусть в точку М пространства приходят две такие волны от точечных источников S_1 и S_2 :

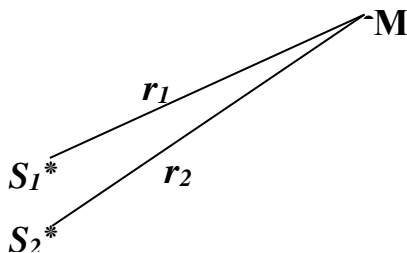


Рисунок 20

$$\xi_1 = \frac{\xi_{01}}{r_1} \sin(\omega_1 t - k_1 r_1) = A_1 \sin \varphi_1$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_{02}}{r_2} \sin(\omega_2 t - k_2 r_2) = A_2 \sin \varphi_2$$

По принципу суперпозиции результирующее колебание в точке М будет:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \sin \varphi.$$

Как было показано ранее (см. сложение одинаково направленных колебаний) амплитуда результирующего колебания определяется из соотношения:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad (114)$$

Из формулы (196) следует, что амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых волн в точке М:

$$\Delta\varphi = (\omega_2 t - k_2 r_2) - (\omega_1 t - k_1 r_1) = (\omega_2 - \omega_1) t - 2\pi \left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) \quad (115)$$

Особый интерес представляет наложение когерентных волн. **Когерентными** называются волны, частоты которых равны, а разности фаз постоянны или

равны нулю. Явление наложения когерентных волн называется **интерференцией**.

Если рассматриваемые волны когерентны, то $\omega_1 = \omega_2$ и

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r, \quad (116)$$

где Δr - разность хода рассматриваемых волн от их источников до точки М. Из выражения (198) следует, что $\Delta\varphi$ для данной точки пространства величина постоянная. Следовательно, амплитуда колебаний в данной точке пространства также постоянна и в зависимости от $\Delta\varphi$ может принимать значения в пределах:

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq (A_1 + A_2)$$

В тех точках пространства, для которых выполняется условие

$$\text{или} \quad \begin{cases} \Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, \text{ т.е. } 2m\pi \\ \Delta r = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots, \text{ т.е. } m\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (117)$$

амплитуда колебаний будет максимальна и выражения (199) называются **условием максимума при интерференции**.

В тех точках пространства, для которых выполняется условие

$$\text{или} \quad \begin{cases} \Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \text{ т.е. } (2m+1)\pi \\ \Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots, \text{ т.е. } (2m+1)\lambda/2, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (118)$$

амплитуда колебаний будет минимальна и выражения (118) называются **условием минимума при интерференции**. Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, то в точках максимума и минимума будут наблюдаться соответственно максимумы или минимумы интенсивности результирующей волны. Таким образом, при интерференции происходит перераспределение интенсивности волн в пространстве: в одних точках волны взаимно усиливают друг друга, в других - взаимно ослабляют. Наблюдающееся распределение интенсивности волн в пространстве называется **интерференционной картиной**.

Если волны некогерентны, то в данной точке пространства $\Delta\varphi \neq const$ и принимает различные значения от 0 до π , $\cos\Delta\varphi$ с равной вероятностью принимает значения от -1 до +1 и $A^2 = A_1^2 + A_2^2$. Таким образом, при наложении некогерентных волн во всех точках пространства интенсивность результирующей волны будет равна сумме интенсивностей складываемых волн.

8.1 Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами, а в случае поперечных волн и с одинаковой поляризацией. Стоячая волна может быть получена при отражении бегущей волны от препятствия и наложении отражённой волны на бегущую.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую начальную фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда начальные фазы обеих волн равны нулю. Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x , и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\xi_1(x,t) &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2(x,t) &= A \cos(\omega t + kx).\end{aligned}\quad (119)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, получим уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos \omega t \quad (120)$$

Из уравнения стоячей волны (120) вытекает, что все точки стоячей волны колеблются с разными амплитудами $A_{cm} = |2A \cos(2\pi x/\lambda)|$, зависящими от координаты x рассматриваемой точки. В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с *одинаковой амплитудой*, но с *запаздыванием по фазе* (в уравнении бегущей волны фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки), все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с *разными амплитудами*, но с *одинаковыми фазами* (в уравнении стоячей волны аргумент косинуса не зависит от x). При переходе через узел множитель $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

В точках среды, где

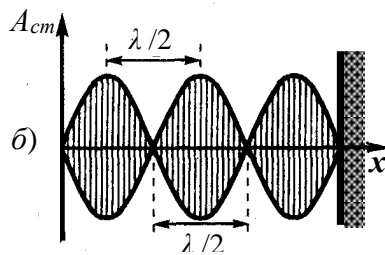
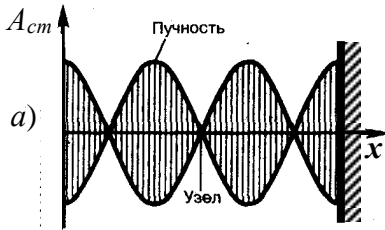
$$2\pi x/\lambda = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (121)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$.

В точках среды, где

$$2\pi x/\lambda = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (122)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ($A_{cm}=2A$), называются **пучностями** стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ($A_{cm}=0$), называются **узлами** стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Из выражений (121) и (122) получим соответственно *координаты пучностей и узлов*:



$$x_{пуч} = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (123)$$

$$x_{узел} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}. \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (124)$$

Рисунок 21

Из формул (123) и (124) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$.

Рассмотрим пример образования стоячей волны. Если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте крепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае возникает узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность (рис.21, а), если более плотная - узел (рис.21, б). Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную. У границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит, и колебания складываются с одинаковыми фазами - образуется пучность. Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные и превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

9 Некоторые свойства электромагнитной волны

Электромагнитные волны представляют собой распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. Электромагнитные волны **поперечны** – векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 46).

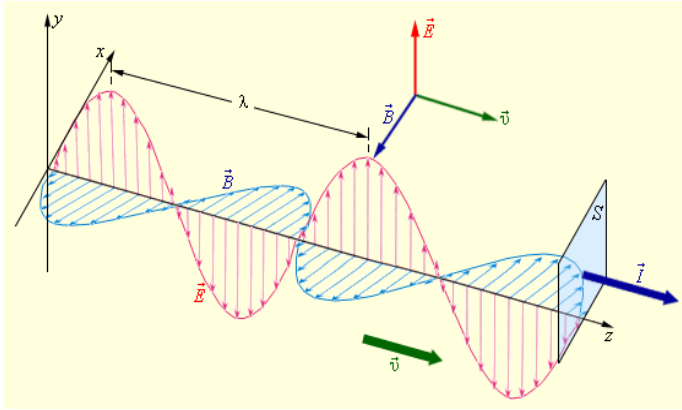


Рисунок 22

Так как векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют правовинтовую тройку векторов, то их взаимная ориентация подчиняется правилу:

$$\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}]$$

Для электромагнитной волны справедливы все формулы, закономерности и соотношения, которые были отмечены ранее для волновых процессов. Поэтому, согласно выражению (105), уравнение синусоидальной плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, можно записать в виде:

$$\begin{cases} E(r, t) = E_0 \cos(\omega t - kr) \\ H(r, t) = H_0 \cos(\omega t - kr) \end{cases} \quad (125)$$

Волновое уравнение такой электромагнитной волны имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E}{dt^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right), \\ \frac{d^2 H}{dt^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (126)$$

где v - фазовая скорость электромагнитной волны. С помощью уравнений Максвелла было показано, что электромагнитные волны распространяются в веществе с конечной скоростью, определяемой по формуле:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (127)$$

Здесь ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные:

$$\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}.$$

Скорость электромагнитных волн в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$):

$$c = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Скорость c распространения электромагнитных волн в вакууме является одной из фундаментальных физических постоянных. Равенство скорости распространения электромагнитных волн в вакууме скорости света в вакууме позволило Максвеллу предположить, что свет имеет электромагнитную природу.

Электромагнитная волна называется **монохроматической**, если проекции её векторов \vec{E} и \vec{H} на оси прямоугольной системы координат совершают гармонические колебания одинаковой частоты.

В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Эти процессы идут одновременно, и электрическое и магнитное поля выступают как равноправные «партнеры». Объемная плотность энергии электромагнитного поля в линейной изотропной среде

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}, \quad (128)$$

В электромагнитной волне модули напряженности магнитного поля \vec{H} и напряженности электрического поля \vec{E} в каждой точке пространства связаны соотношением

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (129)$$

Из уравнения (129) следует, что

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu} E H = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} E H, \quad (130)$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме.

Электромагнитные волны переносят энергию.

Плотностью потока энергии называют энергию, переносимую волной за единицу времени через единицу площади. Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется **вектором Умова-Пойнтинга** \vec{S} . Согласно формуле (112), имеем:

$$\vec{S} = w \vec{u} = w \vec{v}.$$

Для монохроматической волны групповая u и фазовая v скорости равны. Подставляя сюда выражения (128) для w и (127) для v , можно получить:

$$S = \frac{EB}{\mu\mu_0} = EH.$$

Так как векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора $[\vec{E}, \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH :

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (131)$$

Единицей плотности потока энергии в СИ является **Ватт на квадратный метр** (Вт/м²).

Так как **интенсивность бегущей электромагнитной волны** это физическая величина J , равная модулю среднего значения вектора Умова-Пойнтинга за период его полного колебания, то

:

$$J = |\langle \vec{S} \rangle| = |\langle w \rangle| v, \quad (132)$$

где v - фазовая скорость, $\langle w \rangle$ - среднее значение объемной плотности энергии. Согласно выражению (113), интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды. Так как $\langle w \rangle$, согласно выражению (130), пропорциональна E_0^2 , то этот вывод справедлив и для электромагнитной волны: *интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды.*

10 Излучение электромагнитных волн

Первое экспериментальное подтверждение электромагнитной теории Максвелла было дано примерно через 15 лет после создания теории в опытах

Г. Герца (1888 г.). Герц не только экспериментально доказал существование электромагнитных волн, но впервые начал изучать их свойства – поглощение и преломление в разных средах, отражение от металлических поверхностей и т.п. Ему удалось измерить на опыте длину волны и скорость распространения электромагнитных волн, которая оказалась равной скорости света.

Опыты Герца сыграли решающую роль для доказательства и признания электромагнитной теории Максвелла. Через семь лет после этих опытов электромагнитные волны нашли применение в беспроводной связи (А. С. Попов, 1895 г.).

Электромагнитные волны могут возбуждаться только **ускоренно движущимися зарядами**. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда

двигаются с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. В современной радиотехнике излучение электромагнитных волн производится с помощью антенн различных конструкций, в которых возбуждаются быстропеременные токи.

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является небольшой по размерам электрический диполь, дипольный момент $p(t)$ которого быстро изменяется во времени. На рисунке 46 изображён элементарный диполь, совершающий гармонические колебания. Такой элементарный диполь называют *диполем Герца* или *вибратором Герца*. В радиотехнике диполь Герца эквивалентен небольшой антенне, размер которой много меньше длины волны λ (рис. 23).

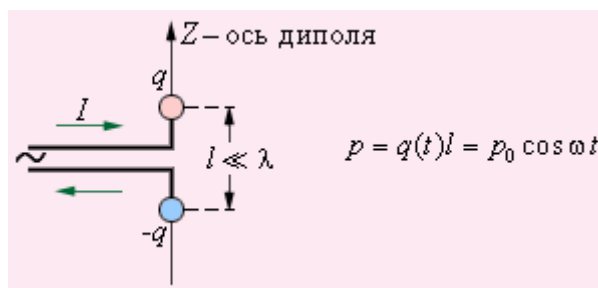


Рисунок 23

На рисунке 24 представлена структура электромагнитной волны, излучаемой таким диполем. Красные линии представляют собой силовые линии вихревого электрического поля, синие точки и крестики соответствуют направлениям вектора индукции магнитного поля, индуцированного вихревым

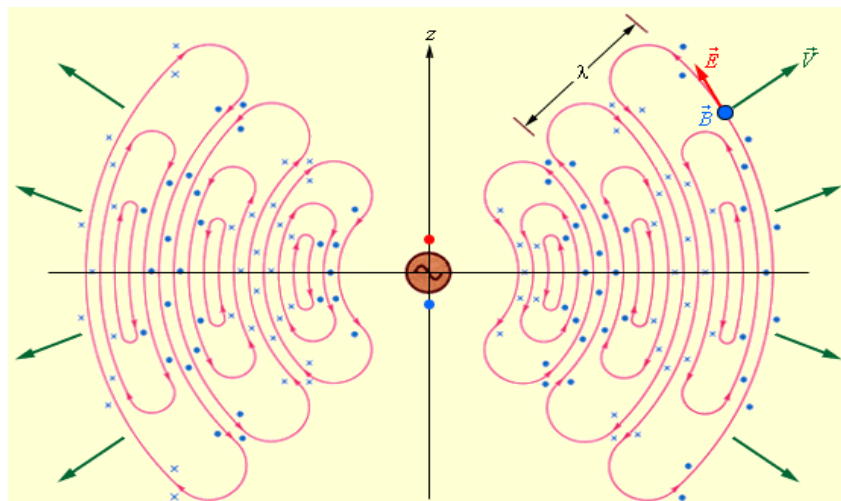


Рисунок 24

электрическим полем.

Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве

излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.